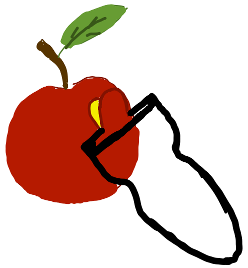
#2025-2026, #Analyse i

Info ◇ Liste des démos sur moodle ◇ Retour sur l'évaluation du cours mercredi au STCC!

◇ Exercice à rendre lundi après les vacances.

Proposition 3.17 Propriétés algébriques des limites.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites et $a,b\in\mathbb{R}$ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$

Alors,

(i) la suite $z_n = x_n + y_n$ converge vers $a+b$

(ii) La suite $z_n = x_n \cdot y_n$ converge vers $a.b$.

(iii) Si $b \neq 0$, la suite $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ converge vers $\frac{a}{b}$

(iv) Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $x_n \leq y_n$ alors, $a \leq b$.

La limite est linéaire

Exemple 3.18 : suite

(iii) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{3n+4}{2n^2+4n+2}$ 1 2

$$x_n = \frac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{3+\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0}}{\underbrace{2}_{2}+\underbrace{\frac{4}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{0}}}_{\to \frac{3}{2}} \qquad \begin{matrix} \to 3 \\ \to 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

(iv) Soit $x_n = (-1)^n$ et $y_n = (-1)^{n+1}$. Posons $z_n = x_n + y_n$

$$z_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n \Big(\underbrace{1+(-1)}_{=0}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Par contre, (x_n) & (y_n) divergent. En particulier, l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ est fausse

FAUX!

Remarque 3.19

(i) En réalité pour que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ on a besoin que 2 des trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) convergent.

(ii) Le résultat de la dernière partie est faux si on remplace les inégalités larges ($\leq$) par des inégalités strictes ($<$) en effet,

$x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$. $\forall n$, $y_n < x_n$, mais $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

§ 3.3 Critères de convergence pour les suites :

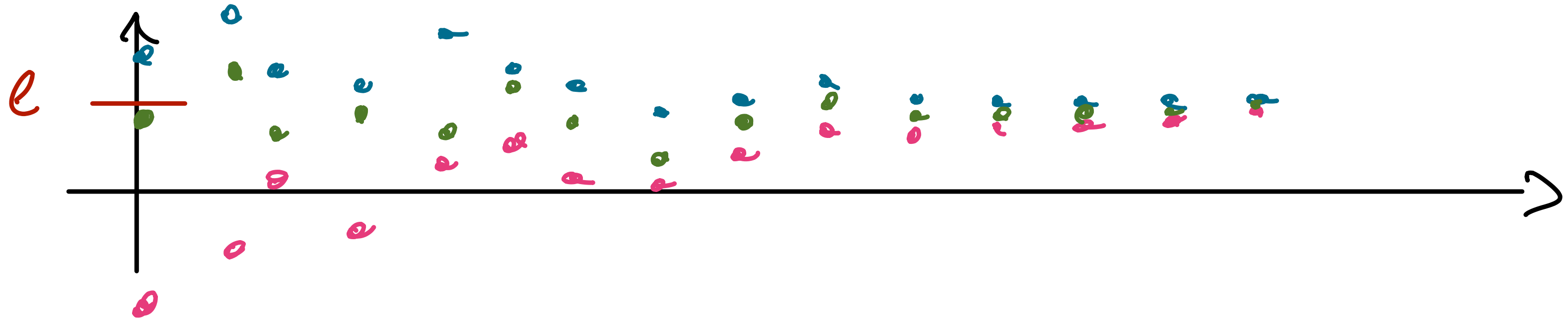
Théorème 3.20 Critère des deux gendarmes

Soient $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ trois suites telles que :

(i) (x_n) et (z_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$

(ii) $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq k$, $x_n \leq y_n \leq z_n$

Alors, (y_n) converge et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$



Corollaire 3.21

Soit $l \in \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres positifs tel que :

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq k,\ |y_n - l| \leq a_n$

Alors, $\lim_{n\to\infty} y_n = l$

Théorème 3.22 suites monotones bornées.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite. Si (x_n) est croissante & majorée (respectivement décroissante & minorée) (x_n) converge vers $\sup_n (x_n)$ (resp. vers $\inf_n (x_n)$)

Théorème 3.23 (Critère de d'Alembert pour les suites)

↳ Jean le rond dit d'Alembert.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell \quad \text{existe}$$

Alors,

(i) si $\ell < 1$ (x_n) converge vers 0

(ii) si $\ell > 1$ (x_n) diverge

(iii) si $\ell = 1$ on ne peut rien dire (Il se pourrait que (x_n) diverge | $x_n = n$

Il se pourrait que (x_n) converge ↳ $\frac{1}{n}$)

Exemples 3.25

(i) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Alors, (x_n) est croissante et majorée et donc converge. On note sa limite $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Plus généralement $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

⚠ LIMITES SELECTIVES

$$\lim_{n \to \infty} \Big(\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\to 1}\Big)^n = \lim_{n \to \infty} 1^n = 1$$

NON!

$$\lim_{n \to \infty} \Big(\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{> 1}\Big)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$\alpha > 1$, $\lim_{n \to \infty} \alpha^n = +\infty$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} e^{n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{\lim_{n \to \infty} \underbrace{\overset{+\infty}{n} \cdot \log\Big(\overset{0}{1 + \frac{1}{n}}\Big)}_{\to 1}}$$

(ii) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante. Alors, les 3 conditions sont équivalentes :

(a) (x_n) diverge

(b) (x_n) n'est pas bornée (b') (x_n) n'est pas majorée

(c) $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$

(iii) Soit (x_n) une suite décroissante. Alors, les 3 cond. suivantes sont équivalentes.

(a) (x_n) diverge

(b) (x_n) n'est pas minorée

(c) $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$

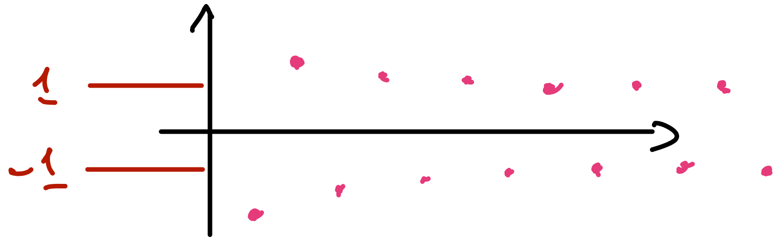
(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et la suite $x_n = \frac{\alpha^n}{n!}$

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\alpha^n}{n!}} = \alpha \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\alpha}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0 = \ell$$

d'Alembert $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

§ 3.4 limsup, liminf et sous-suites

$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$



Définition 3.30 (Sous-suite, point d'accumulation)

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite.

(i) Une sous-suite de (x_n) est la donnée d'une suite d'indices $(n_k)_{k \geq 0}$ tq

- $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k \in \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k < u_{k+1}$ i.e. (u_k) est strictement croissante.

La sous-suite est $(x_{u_k})_{k \geq 0}$ et on note

$(x_{u_k}) \subseteq (x_n)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r] \arrow[r, bend right, dashed, "(u_k)"'] & \mathbb{N} \arrow[r] \arrow[r, bend left, dashed, "\text{suite } (x_n)"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(ii) $\ell \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de (x_n) si

$$\exists \, (x_{u_k})_{k \geq 0} \subseteq (x_n) \quad \text{tq} \quad \lim_{k \to \infty} x_{u_k} = \ell$$

Remarque 3.31 :

La suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est toujours une suite d'entiers strictement croissante et vérifie

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$$

En effet, on peut montrer que $\forall k \geq 0$, $n_k \geq k$

Exemple 3.32

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$$\boxed{n_k = 2\cdot k}$$

$$x_{n_k} = (-1)^{n_k}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) = (-1)^{2k}\left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1 + \frac{1}{2k} \to 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = 1$, i.e. 1 est un point d'accumulation!

Si on considère $n_k = 2k+1$, on a

$$x_{n_k} = (-1)^{2k+1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) = -1 - \frac{1}{2k+1} \longrightarrow -1$$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -1$ et -1 est un point d'accumulation

<u>Théorème 3.33</u> (Théorème de Bolzano-Weierstraß)

Toute suite bornée admet un point d'accumulation

x_n = un nombre au hasard entre -10^{14} et 10^{14}

Alors, $\exists\, (x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ qui converge.

Proposition 3.35

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite.

(i) Si (x_n) converge, toutes les sous-suites de (x_n) convergent vers $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Très utile Pour montrer qu'une suite diverge

(iii) Si $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ et $(x_{m_k})_{k\geq 0}$ sont deux sous-suites tq $\{n_k : k\geq 0\} \cup \{m_k : k\geq 0\} = \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = \ell$, alors, (x_n) converge vers ℓ également

Définition 3.37 1/3 (limsup, liminf)

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. Alors, le plus grand point d'accumulation de (x_n) est appelé la limsup de (x_n), qu'on note $\limsup_{n \to \infty} x_n$. Le plus petit point d'accumulation de (x_n) est appelé la liminf de (x_n), qu'on note $\liminf_{n \to \infty} x_n$.